



**CONCOURS EXTERNE DE CONTRÔLEUR
DES FINANCES PUBLIQUES DE DEUXIÈME CLASSE**

ANNÉE 2022

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures - Coefficient : 3

Le candidat traitera le présent sujet correspondant à l'option formulée dans son dossier d'inscription :

– Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.

Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.



**RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Tournez la page S.V.P.

Le candidat complètera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Jour, mois et année

Nom :
Prénom :
Date de naissance :
N° de candidature :
Signature :

Numéro de candidature

Signature obligatoire

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Liberté - Égalité - Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

À compléter par le candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : **Contrôleur des Finances publiques**

Épreuve n° : **2**

Matière : **030 - Mathématiques**

Date : **0 1 0 2 2 0 2 2**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :

Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE :

Faire comme ceci

Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les géloses correspondantes.

Reportez la note dans les zones NOTE / 20 et dans le cadre A.

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case erreur et reportez la note dans le cadre B.

Cadre A réservé à la notation				Cadre B réservé à la notation rectificative			
20	19	18		20	19	18	
17	16	15		17	16	15	
14	13	12		14	13	12	
11	10	09		11	10	09	
08	07	06		08	07	06	
05	04	03		05	04	03	
02	01	00		02	01	00	
Décimales				Décimales			
00	25	50	75	00	25	50	75
				Erreur			

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE



FINANCES PUBLIQUES

SUJET

MATHÉMATIQUES

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »;
- les règles de calcul, équerres, compas, rapporteurs et tables de logarithmes ne comportant aucune formule algébrique, géométrique ou trigonométrique.

Ce sujet comporte cinq exercices, indépendants les uns des autres.

Vous traiterez l'ensemble des exercices dans l'ordre choisi.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$
et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1) a) Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C .

2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3) a) Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4) Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 < I_2 < e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n .

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A :

Un grossiste achète des boîtes de café chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : la boîte provient du fournisseur A ;
- événement B : la boîte provient du fournisseur B ;
- événement S : la boîte présente des traces de pesticides.

1) Traduire l'énoncé sous forme d'arbre pondéré.

2) a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \bar{S}$?

b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B :

Le gérant d'un café achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1) a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$

b) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n < 1$

2) On admet que la suite (u_n) est croissante.

a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite l

b) On admet que cette limite l vérifie $f(l) = l$ où f est la fonction associée à la suite (u_n) telle que $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$. Déterminer la valeur de l .

3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ dont on déterminera le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Retrouver alors la limite de (u_n) déterminée au 2b).

EXERCICE 4

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0 ; 4 ; 1)$, $B(1 ; 3 ; 0)$, $C(2 ; -1 ; -2)$ et $D(7 ; -1 ; 4)$.

1) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.

a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

d) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .

3) Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a) Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b) Vérifier que la droite d , intersection des plans P_1 et P_2 , a pour représentation paramétrique

$$\begin{aligned}x &= -4t - 2 \\ y &= t \\ z &= 3t + 2\end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ l'équation $\cos(t) = \sin(\frac{5\pi}{6})$.

