FINANCES PUBLIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'ACCÈS AU GRADE D'INSPECTEUR DES FINANCES PUBLIQUES

ANNÉE 2022

ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ N° 2

Durée : 3 heures – Coefficient : 5

Mathématiques

Toute note inférieure à 5/20 est éliminatoire.

Recommandations importantes

Le candidat trouvera au verso la manière de servir la copie dédiée.

Sous peine d'annulation, en dehors du volet rabattable d'en-tête, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tels que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro ou toute autre indication, même fictive, étrangère au traitement du sujet.

Sur les copies, les candidats devront écrire et souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre de couleur noire ou bleue uniquement. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Il devra obligatoirement se conformer aux directives données.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Liberté
Égalité
Fraternité

Le candidat complétera l'intérieur du volet rabattable des informations demandées et se conformera aux instructions données

Nom de naissance

Prénom usuel

Jour, mois et année

Numéro de candidature

Signature obligatoire

Nom : ....

Prénom : ....

Date de naissance : ....

N° de candidature : ....
(si absence de code barre)

Signature :

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

À compléter par le candidat

Ne rabattre le cache qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Faire comme ceci

Ne pas faire

ÉTIQUETTE D'IDENTIFICATION

Axe de lecture code à barres candidat

Concours externe - interne - professionnel - ou examen professionnel [1]
[1] Rayer les mentions inutiles

Externe

Pour l'emploi de : **Inspecteur des Finances publiques**

Épreuve n° : **2**

Matière **030 – Mathématiques**

Date : **0 9 1 1 2 0 2 1**

Nombre d'intercalaires supplémentaires :

Préciser éventuellement le nombre d'intercalaires supplémentaires

RÉSERVÉ À L'ADMINISTRATION

À L'ATTENTION DU CORRECTEUR

Pour remplir ce document :
Utilisez un stylo ou une pointe feutre de couleur NOIRE ou BLEUE.

EXEMPLE DE MARQUAGE : Faire comme ceci — Ne pas faire

Pour porter votre note, cochez les gélules correspondantes.

Reportez la note dans les zones **NOTE / 20** et dans le cadre **A**

En cas d'erreur de codification dans le report des notes cochez la case **erreur** et reportez la note dans le cadre **B**.

Cadre A réservé à la notation		
20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales: ,00 ,25 ,50 ,75

Cadre B réservé à la notation rectificative		
20	19	18
17	16	15
14	13	12
11	10	09
08	07	06
05	04	03
02	01	00

Décimales: ,00 ,25 ,50 ,75

Erreur

À L'ATTENTION DU CANDIDAT

En dehors de la zone d'identification rabattable, les copies doivent être totalement anonymes et ne comporter aucun élément d'identification tel que nom, prénom, signature, paraphe, localisation, initiale, numéro, ou toute autre indication même fictive étrangère au traitement du sujet.

Il est demandé aux candidats d'écrire et de souligner si nécessaire au stylo bille, plume ou feutre, de couleur noire ou bleue uniquement. Une autre couleur pourrait être considérée comme un signe distinctif par le jury, auquel cas la note de zéro serait attribuée. De même, l'utilisation de crayon surligneur est interdite.

Les étiquettes d'identification codes à barres, destinées à permettre à l'administration d'identifier votre copie, ne doivent être détachées et collées dans les deux cadres prévus à cet effet qu'en présence d'un membre de la commission de surveillance.

Suivre les instructions données pour les étiquettes d'identification

NOTE / 20

NOTE / 20

EN AUCUN CAS, LE CANDIDAT NE FERMERA LE VOLET RABATTABLE AVANT D'Y AVOIR ÉTÉ AUTORISÉ PAR LA COMMISSION DE SURVEILLANCE

SUJET

MATHÉMATIQUES

Code matière : 030

Les candidates et les candidats peuvent avoir à leur disposition sur la table de concours le matériel d'écriture, une règle, un correcteur, des surligneurs et le matériel spécifique ci-après.

Les matériels autorisés sont les suivants :

- *les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;*
- *les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen ».*
- *les règles graduées, équerres, compas, rapporteurs.*

Le candidat traitera obligatoirement les quatre exercices suivants.

EXERCICE N° 1

Pour tout entier n ≥ 1 et tout réel x, on pose : $a_n(x)=\dfrac{x}{n(1+nx^2)}$

1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum a_n$ **.**

2) a. Étudier les variations de la fonction a_n **.**

b. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum a_n$ **.**

On définit la somme S de la série par : $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

c. S est-elle continue ?

On supposera dans la suite de l'exercice que S est dérivable pour tout x ≠ 0.

3) On pose $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ pour N entier avec N ≥ 1.

a. Montrer qu'il existe un réel c(N) strictement positif tel que, pour 0 < | x | < c(N), on a :

$\dfrac{S(x)}{x} \geqslant \dfrac{S_N(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}$ **.** (c(N) étant dépendant de N).

b. En déduire la limite en 0 de $\dfrac{S(x)}{x}$ **. Conclure sur la dérivabilité de S en 0.**

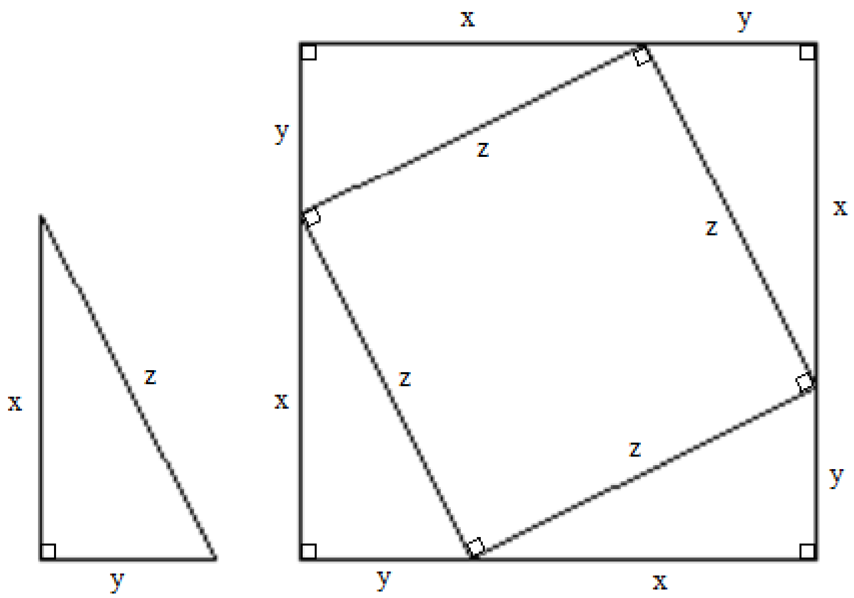
EXERCICE N° 2

Les deux parties ci-dessous sont indépendantes.

Partie I – Une preuve du théorème de Pythagore.

Le triangle ci-dessous (voir figure à gauche) est un triangle rectangle et ses côtés sont représentés par les lettres x, y et z. On se propose de démontrer le théorème de Pythagore sur ce triangle.

Les quatre triangles rectangles à droite sont inscrits par un carré plus petit incliné dans un carré plus grand.



Triangle rectangle de côtés x, y et z

Triangles rectangles inscrits dans un carré plus grand

1) Calculer la surface du grand carré par deux méthodes différentes.

2) En déduire le théorème de Pythagore.

Partie II – Tétraèdre régulier

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$. Soit G son isobarycentre et H celui du triangle ABC.

1) Montrer que H, A **et** G **sont alignés en précisant leur position relative.**

2) Montrer que (HD) **est orthogonale au plan** (ABC).

3) a. Calculer HA **en fonction de** a. **Puis en déduire** HB **et** HC.

b. Calculer HD **en fonction de** a.

c. Calculer GA **en fonction de** a. **Puis en déduire** GB **et** GC.

d. Calculer GD **en fonction de** a.

4) Calculer $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$ **. En déduire une mesure de l'angle** $\widehat{AGB}$ **en fonction d'arccosinus.**

5) Application numérique : exprimer cet angle en degrés et minutes.

EXERCICE N° 3

On souhaite déterminer tous les réels λ tels que l'équation (E_λ) : $y''(x) - x.y'(x) + \lambda.y(x) = 0$ admette des solutions polynomiales non nulles, puis étudier différentes propriétés de ces solutions (connues sous le nom de polynômes d'Hermite).

1) Soit λ un réel, et P un polynôme non nul solution de (E_λ) .
En notant *n* le degré de *P*, démontrer que : $\lambda = n$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $\lambda = n$, où $n \in \mathbb{N}$ *On note alors (E_n) l'équation : $y''(x) - x.y'(x) + n.y(x) = 0$*

2) On introduit la fonction f : $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' - X.P' + n.P \end{cases}$

a. Vérifier que *f* est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ **.**

b. Écrire soigneusement la matrice *A* de *f* dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ **, puis justifier que *A* n'est pas inversible.**

c. En déduire l'existence d'un polynôme H_n **non nul, de degré *n* et unitaire (de coefficient dominant 1), qui est solution de** (E_n) **.**

d. Établir que $ker(f) = Vect(H_n)$ **, où** H_n **désigne l'unique polynôme non nul, de degré *n* et unitaire qui est solution de** (E_n) **.**

3) Démontrer que H_n' **vérifie l'équation** (E_{n-1}) **, puis en déduire que :**

$$\forall n \geq 1 \ , \ H_n' = n.H_{n-1}$$
$$\forall n \geq 2 \ , \ H_n - X.H_{n-1} + (n-1).H_{n-2} = 0$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer que : $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) = -\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_{n-1}(x)\right)'$.

b. En déduire que : $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) = (-1)^n \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)^{(n)}$ **, puis donner l'expression de** $H_n(x)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **et tout** $x \in \mathbb{R}$ **.**

EXERCICE N° 4

Soit $\overline{ppqq}$ l'écriture en base 10 d'un entier n .

1) Donner l'écriture en base 10 de n **.**

2) Montrer que $100p+q$ **multiple de 11 si et seulement si** $p+q$ **multiple de 11.**

3) En déduire l'ensemble des entiers n **qui sont des carrés d'entiers.**